

Занятие 11. Резонанс в электрических цепях

План

1. Резонанс напряжений
2. Резонанс токов
3. Задачи для самостоятельного решения

1. Резонанс напряжений

Резонанс – такой режим цепи синусоидального тока, содержащей индуктивные и емкостные элементы, при котором реактивное сопротивление и проводимость равны нулю. При резонансе приложенное напряжение и входной ток совпадают по фазе. Цепи, в которых возникает явление резонанса, называют *резонансными цепями* или *колебательными контурами*.

Резонанс напряжений наблюдается в цепях с последовательным соединением ветвей, содержащих L и C элементы.

Простейшей цепью, в которой наблюдается резонанс напряжений, является последовательный колебательный контур (рис. 11.1).

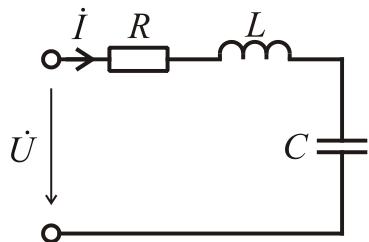


Рис. 11.1

Комплексное сопротивление колебательного контура

$$\underline{Z} = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right).$$

Реактивное сопротивление

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C}.$$

Резонанс напряжений наступает, когда реактивное сопротивление обращается в нуль, т. е.

$$X = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = 0.$$

Это происходит при резонансной частоте $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

Сопротивления индуктивного и емкостного элементов в схеме последовательного колебательного контура при резонансе равны:

$$x_L = x_C = \omega_0 L = \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Эту величину называют *характеристическим сопротивлением* контура и обозначают ρ :

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Напряжение индуктивного элемента при резонансе

$$U_L = j\omega_0 L I.$$

Учитывая, что при резонансе входное напряжение равно напряжению резистивного элемента, получим

$$U_L = \frac{\rho}{R} U_{\text{вх}} = Q U_{\text{вх}}.$$

Величину $Q = \frac{\rho}{R}$ называют *добротностью* колебательного контура.

Она характеризует резонансные свойства контура. Добротность последовательного колебательного контура тем выше, чем меньше активное сопротивление R .

2. Резонанс токов

Резонанс токов может наблюдаться в цепях с параллельным соединением ветвей, содержащих L и C элементы. Простейшей цепью, в которой может наблюдаться резонанс токов, является параллельный колебательный контур (рис. 11.2).

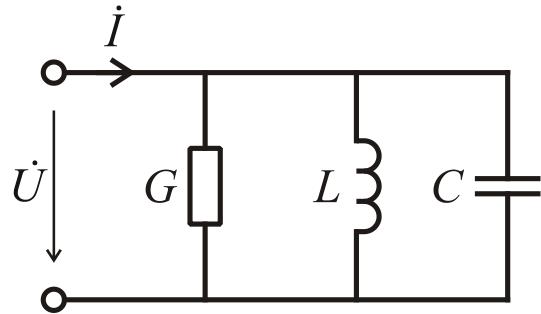


Рис. 11.2

Комплексная проводимость контура

$$\underline{Y} = G + j \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right).$$

Резонанс токов наступает, когда реактивная проводимость контура обращается в нуль:

$$B = \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C \right) = 0.$$

Резонансная частота

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

На резонансной частоте полная проводимость контура минимальна:

$$Y(\omega_0) = G.$$

Соответственно полное сопротивление параллельного колебательного контура

$$Z(\omega_0) = \frac{1}{Y(\omega_0)}$$

на частоте резонанса максимально. Следовательно, при резонансе токов ток неразветвленной части цепи имеет наименьшее значение и равен току резистивного элемента: $I_{рез} = U/R$.

При резонансе токи емкостного и индуктивного элементов по модулю равны:

$$I_C = \omega_0 C U = Q I.$$

При резонансе они в Q раз больше, чем ток неразветвленной части цепи. Величину $Q = \frac{R}{\rho}$ называют добротностью параллельного колебательного контура. Как и в случае последовательного колебательного контура, характеристическое сопротивление

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Добротность параллельного колебательного контура тем больше, чем больше сопротивление резистора R , включенного параллельно индуктивному и емкостному элементам.

Примеры расчёта

Пример 11.1. Катушка индуктивностью $L = 100$ мГн и сопротивлением $R = 150$ Ом соединена последовательно с конденсатором емкостью $C = 0,068$ мкФ. Вычислить резонансную частоту ω_0 , характеристическое сопротивление и добротность колебательного контура.

Решение. Резонансная частота контура

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0,1 \cdot 6,8 \cdot 10^{-8}}} = 1,21 \cdot 10^4 \text{ рад/с.}$$

Характеристическое сопротивление

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{0,1}{6,8 \cdot 10^{-8}}} = 0,121 \cdot 10^4 \text{ Ом.}$$

Добротность контура

$$Q = \frac{\rho}{R} = \frac{1210}{150} = 8.$$

Пример 11.2. Определить резонансную частоту цепи, показанной на рис. 1.3. $L = 500 \text{ мГн}$, $C = 1 \text{ мкФ}$. Сопротивление резистора R принимает значения, равные 1000 Ом , 100 Ом .

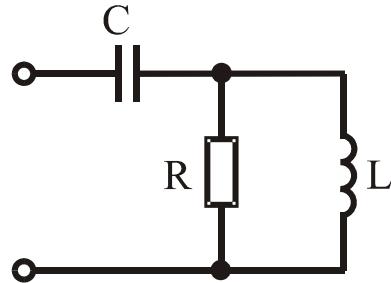


Рис. 11.3

Решение. Комплексное сопротивление контура

$$\underline{Z} = \frac{1}{j\omega C} + \frac{j\omega LR}{R + j\omega L} = \frac{1}{j\omega C} + \frac{R(\omega L)^2}{R^2 + (\omega L)^2} + \frac{j\omega LR^2}{R^2 + (\omega L)^2}.$$

Реактивное сопротивление контура при резонансе равно нулю:

$$X = \frac{-1}{\omega C} + \frac{\omega LR^2}{R^2 + (\omega L)^2} = 0.$$

Из последнего выражения найдем резонансную частоту:

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\frac{R^2}{LCR^2 - L^2}}.$$

Рассмотрим вариант, когда сопротивление резистора $R = 1000 \text{ Ом}$. Подставляя значения элементов, найдем, что резонансная частота

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\frac{10^6}{0,5 \cdot 10^{-6} \cdot 10^6 - 0,25}} = 2000 \text{ рад/с.}$$

Для сравнения отметим, что в «классическом» резонансном контуре, при $R = \infty$ резонансная частота

$$\omega_{\text{рез}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0,5 \cdot 10^{-6}}} = 1414 \text{ рад/с.}$$

Во втором случае, при $R = 100 \text{ Ом}$ задача не имеет решения:

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\frac{10^4}{0,5 \cdot 10^{-6} \cdot 10^4 - 0,25}} = \sqrt{-0,295}.$$

Пример 11.3. Определить резонансную частоту и сопротивление параллельного колебательного контура, показанного на рис. 11.4. Резистор, включенный последовательно с индуктивным элементом, учитывает активное сопротивление реальной индуктивной катушки.

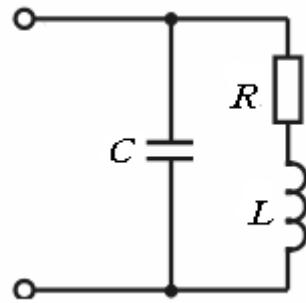


Рис. 11.4

Решение. Комплексная проводимость контура

$$Y = j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L} = \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} - j\omega \frac{L - \omega^2 L^2 C - R^2 C}{R^2 + (\omega L)^2}.$$

При резонансе реактивная проводимость контура обращается в нуль

$$B_{\text{рез}} = \omega \frac{L - \omega^2 L^2 C - R^2 C}{R^2 + (\omega L)^2} = 0.$$

Из последнего выражения найдем резонансную частоту:

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\frac{L - R^2 C}{L^2 C}}.$$

Сопротивление контура при резонансе

$$Z_{\text{рез}} = R_{\text{рез}} = \frac{\omega_{\text{рез}}^2 L^2 + R^2}{R} = \frac{L}{RC}.$$

Рассмотренный пример показывает, что резонансная частота и сопротивление параллельного колебательного контура зависят от активного сопротивления индуктивной катушки. Более того, чем больше это сопротивление, тем меньше сопротивление контура при резонансе.

3. Задачи для самостоятельного решения

Задача 11.1. Рассчитать емкость конденсатора C , который нужно включить последовательно с индуктивной катушкой, имеющей параметры $L = 158$ мГн и $R = 20$ Ом, для того чтобы резонансная частота цепи была равна 10 кГц. Какова добротность резонансного контура?

Задача 11.2. Резонансная частота последовательного колебательного контура $f_0 = 1$ кГц. Емкость конденсатора $C = 0,5$ мкФ. Отношение напряжения на конденсаторе к входному напряжению равно 40. Вычислить параметры индуктивной катушки R_k и L_k .

Задача 11.3. В последовательном колебательном контуре (рис. 11.5) $L = 10$ мГн, $C_0 = 300$ пФ, $R = 100$ Ом. Определить, в каких пределах изменяется резонансная частота f_0 , если емкость переменного конденсатора C изменяется от 0 до 300 пФ.

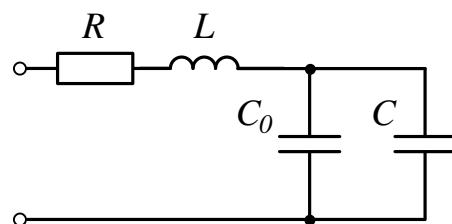


Рис. 11.5

Задача 11.4. Последовательный колебательный контур должен настраиваться резонансную частоту ω_0 при помощи дополнительного конденсатора C_d , который может включаться последовательно или параллельно с основным конденсатором C . По данным, приведенным в табл. 11.1, вычислить емкость C_d и выбрать схему включения дополнительного конденсатора (последовательно или параллельно с основным конденсатором).

Таблица 11.1

| № п/п | C , нФ | L , мГн | ω_0 , рад/с |
|-------|----------|-----------|--------------------|
| 1 | 70 | 20 | 50000 |
| 2 | 34 | 12 | 30000 |
| 3 | 10 | 10 | 50000 |
| 4 | 20 | 70 | 20000 |
| 5 | 42 | 5 | 35000 |

Задача 11.5. Рассчитать параметры двух элементов последовательного колебательного контура по заданной резонансной частоте f_0 , добротности Q и известному параметру третьего элемента. Данные для расчета приведены в табл. 11.2.

Таблица 11.2

| № п/п | f_0 , кГц | Q | Третий параметр |
|-------|-------------|-----|-----------------|
| 1 | 3,8 | 20 | $C = 3,95$ нФ |
| 2 | 8 | 40 | $R = 6$ Ом |
| 3 | 40 | 50 | $L = 4,2$ мГн |
| 4 | 20 | 50 | $C = 0,4$ нФ |
| 5 | 16 | 25 | $R = 40$ Ом |

Задача 11.6. Последовательный резонансный контур имеет параметры: $L = 0,1$ Гн, $C = 100$ мкФ, $R = 20$ Ом. Рассчитать резонансную частоту и добротность контура. Определить напряжение конденсатора U_C на резонансной частоте, если входное напряжение $U_{\text{вх}} = 1$ В. Как изменятся резонансная частота, добротность и напряжение U_C при подключении нагрузочного резистора $R_h = 10$ кОм (рис. 11.6)?

Задача 11.7. Последовательный резонансный контур (рис. 11.6) имеет параметры: $L = 10$ мГн, $R = 10$ Ом. Сопротивление нагрузки $R_h = 1$ кОм. В каких пределах изменяется резонансная частота контура, если емкость конденсатора изменяется от 100 нФ до 500 нФ?

Задача 11.8. Вывести формулу резонансной частоты RLC -цепи, показанной на рис. 11.7. Как изменится резонансная частота, если сопротивление резистора увеличить в два раза?

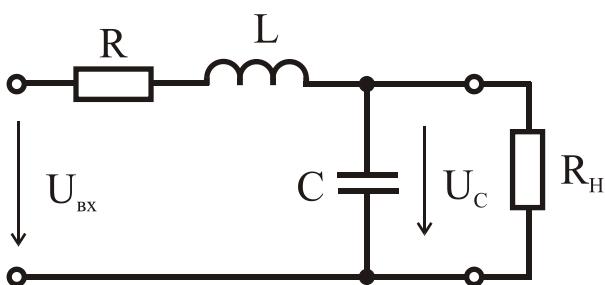


Рис. 11.6

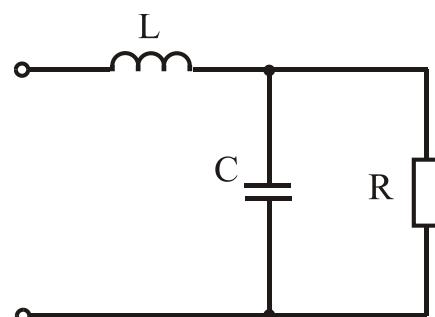


Рис. 11.7

Задача 11.9. Найти значение емкости C последовательного колебательного контура (рис. 11.8), при котором амплитуда напряжения U_C имеет максимальное значение на частоте ω .

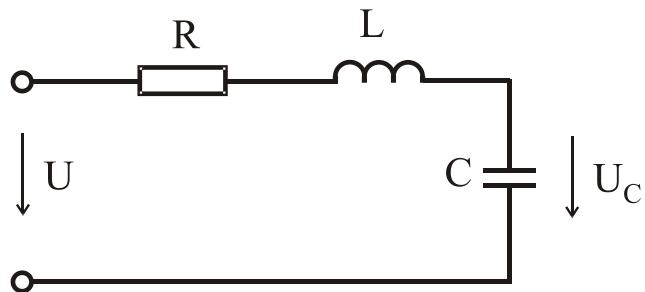


Рис. 11.8

Задача 11.10. Цепь, показанная на рис. 11.9, является фильтром низких частот, ослабляющим сигналы, частоты которых больше некоторой граничной частоты, называемой *частотой среза*. Рассчитать резонансную частоту фильтра, если $R_l = 1 \text{ кОм}$, $R_h = 250 \text{ Ом}$, $L = 30 \text{ мГн}$, $C = 0.378 \text{ мкФ}$.

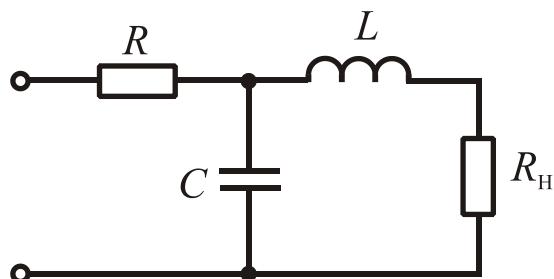


Рис. 11.9

Задача 11.11. В параллельном резонансном контуре (рис. 11.10) $L = 10 \text{ мГн}$, $R = 1 \text{ кОм}$, $C = 25 \text{ нФ}$. Определить пределы изменения резонансной частоты контура, если движок потенциометра перемещается из верхнего положения в нижнее.

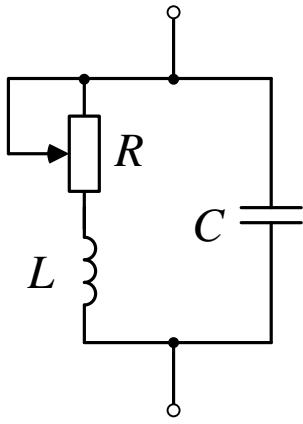


Рис. 11.10

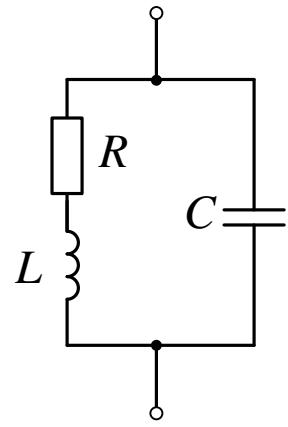


Рис. 11.11

Задача 11.12. Рассчитать, при каком значении индуктивности L в цепи (рис. 11.11) наступит резонанс на частоте $\omega = 5000$ рад/с. Емкость конденсатора $C = 2$ мкФ, сопротивление резистора $R = 20$ Ом.

Задача 11.13. В параллельном резонанском контуре (рис. 11.11) резонансная частота $f_0 = 1.59$ кГц, резонансное сопротивление контура $R_0 = 10$ кОм, индуктивность катушки $L = 10$ мГн. Определить параметры C и R .

Задача 11.14. В радиотехнике используют параллельные колебательные контуры, в которых индуктивные или емкостные элементы включены в обе ветви. Их называют контурами, включенными по сложной схеме. В таком контуре возможны два резонанса: последовательный и параллельный.

Для контура, показанного на рис. 11.12, найти частоты последовательного и параллельного резонансов. Значения элементов: $L = 10$ мГн, $C_1 = C_2 = 0.01$ мкФ.

Задача 11.15. В контуре, показанном на рис. 11.13, одна ветвь образована индуктивностью L_1 , а другая – индуктивностью L_2 и емкостью C . Распределение суммарной индуктивности $L = L_1 + L_2$ между ветвями оценивается коэффициентом включения $P_L = L_1/L$. Вывести формулу для определения частот последовательного и параллельного резонансов. Как зависят эти частоты от коэффициента включения?

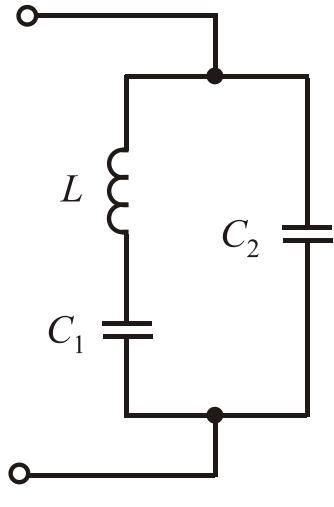


Рис. 11.12

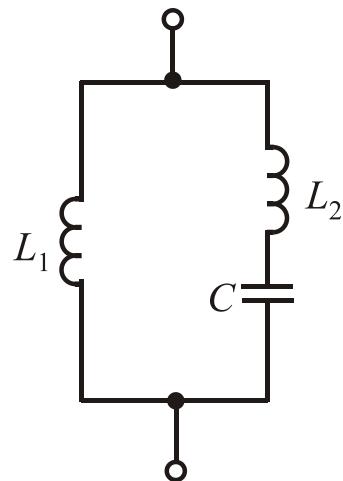


Рис. 11.13

Задача 11.16. Контур, изображенный на рис. 11.12, используют для подавления колебаний, имеющих частоту, в два раза меньшую основной частоты. Достигается это настройкой всего контура в резонанс с частотой ω_0 , а левой ветви – в резонанс с частотой $0.5\omega_0$. Определить емкости конденсаторов C_1 и C_2 , если $\omega_0 = 10^4 \text{ с}^{-1}$, $L = 50 \text{ мГн}$.

Задача 11.17. Резонансный контур, показанный на рис. 11.13, используют для подавления колебаний, имеющих частоту, в два раза превышающую частоту основных колебаний ω_0 . Для этого его включают в качестве поперечной ветви в лестничную схему, показанную на рис. 11.14. Какими должны быть индуктивности L_1 и L_2 для того, чтобы контур имел максимальное сопротивление на частоте $\omega_0 = 1000 \text{ с}^{-1}$ и минимальное сопротивление на частоте $2\omega_0$? Емкость конденсатора $C = 0.01 \text{ мкФ}$.

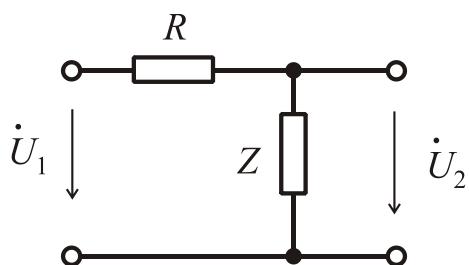


Рис. 11.14